Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 7 (84)

MATHÉMATIQUES

SUR QUELQUES ÉVALUATIONS CONCERNANT LES FAMILLES DE FONCTIONS AYANT DES DÉRIVÉES À CARRÉ INTÉGRABLE

Par S. SOBOLEV (SOBOLEFF), Membre correspondant de l'Académie

Dans cet article nous démontrons quelques propositions qui ont des applications dans certaines questions de la théorie des équations différentielles.

Considérons l'ensemble de toutes les fonctions $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ continues dans un domaine fermé D de l'éspace, ayant des dérivées continues jusqu'à l'ordre s à l'intérieur de ce domaine.

Désignons par $L_s(A)$ la famille des fonctions de cet ensemble qui satisfont aux inégalités suivantes:

$$\overbrace{\int\int\cdots\int}^{n}\left(\frac{\partial^s\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots dx_n^{\alpha_n}}\right)^2 dx_1dx_2\ldots dx_n \leqslant A;\ {}^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=j}_{j=1,2,\ldots,s}. \qquad (1)$$

En faisant quelques hypothèses restrictives sur le domaine D, nous pouvons établir les deux theorèmes suivants.

Théorème I. *Les fonctions de la famille* $L_k(A)$, où k *est le plus petit nombre entier qui surpasse* $\frac{n}{2}$, *c.-à.-d.* $k=\left[\frac{n}{2}\right]+1$, *sont bornées dans leur ensemble.*

Théorème II. *La famille* $L_k(A)$ *satisfait également à la condition de Hölder d'ordre* $\alpha<1$ *pour n paire et d'ordre* $\alpha=\frac{1}{2}$ *pour n impaire.*

Indiquons les conditions qu'il faut imposer au domaine D.

Pour que le théorème I soit vrai, il suffit que chaque point M du domaine D soit accessible par un secteur sphérique $V(M)$ de rayon constant h, et d'angle solide constant contenu à l'intérieur de D.

Pour que le théorème II soit vrai, il suffit de supposer que si deux points M_1 et M_2 sont les éxtrémités d'un segment rectiligne de longueur $\delta<\frac{h}{2}$ contenu à l'intérieur de D, alors l'angle entre les axes des secteurs $V(M_1)$ et $V(M_2)$ peut être choisi de telle façon qu'il ne surpasse $K(\delta)$, où K est une constante fixe.

Nous démontrons d'ailleurs trois propositions, qui sont inverse à nos théorèmes.

1) Les fonctions de la famille $L_{k-1}(A)$ sont non-bornées dans leur ensemble.

2) Dans la famille $L_k(A)$ pour n paire la condition de Hölder d'ordre $\alpha = 1$ n'est pas également satisfaite.

3) La condition de Hölder dans la famille $L_k(A)$ pour n impair de n'importe quel ordre $\alpha > \frac{1}{2}$ n'est pas également satisfaite.

Nos théorèmes donnent une précision des évaluations connues, dues à l'école de Göttingen, qu'on rencontre souvent dans différents problèmes de la théorie des équations aux derivées partielles.

Dans quelques cas particuliers, par exemple pour les équations quasi linéaires hyperboliques, examinées par Schauder * l'emploi de ces évaluations plus précises permet de déterminer exactement le nombre nécessaire des dérivées continues dans les données de Cauchy pour une telle équation.

Indiquons les traits principaux de la démonstration. Nous nous servons dans ce qui suit des coordonnées polaires dans l'espace à n dimensions. Introduisons les notations correspondantes.

Soit S la sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine, r la distance de l'origine M à un point variable P, et ω le point de la surface S situé sur le rayon MP. $d\omega$ sera l'élément de la surface de cette sphère. Nous aurons:

$$dV = dx_1 dx_2 \ldots dx_n = r^{n-1} dr d\omega. \tag{2}$$

Parfois nous considérons au lieu de ω les deux coordonnées ϑ et λ. Nous désignons par ϑ la distance angulaire entre ω et le pôle de la sphère S et par λ, le point d'intersection de l'équateur de S et du méridien passant par ω. $d\lambda$, l'élément de l'équateur, sera l'élément de la surface de la sphère dans l'espace à $(n-1)$ dimensions (plan équatorial). $d\omega$ est lié avec $d\lambda$ et $d\vartheta$ par la relation:

$$d\omega = \sin^{n-2}\vartheta \, d\vartheta \, d\lambda. \tag{3}$$

Désignons encore par $\varkappa_s$ l'aire de la surface d'une sphère à rayon 1 dans l'espace à s dimensions.

Il faut remarquer que les dérivées de φ par rapport à r sont des combinaisons linéaires des dérivées de même ordre par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à coefficients inférieurs à l'unité.

Prenons un système de coordonnées polaires ayant pour l'origine le point M considéré. Soit φ une fonction de notre famille $L_k(A)$. Posons:

$$\Omega = \varphi - \frac{r}{1!}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{r^2}{2!}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{r^3}{3!}\frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{r^{k-1}}{(k-1)!}\frac{\partial^{k-1}\varphi}{\partial r^{k-1}}. \tag{4}$$

Il est évident que

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} = \frac{(-r)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{\partial^k \varphi}{\partial r^k}; \quad \Omega|_{r=0} = \varphi(M). \tag{5}$$

Ensuite

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{[kr^{k+1} - (k+1)hr^k - h^{k+1}]\Omega\right\} \equiv \Delta_1 =$$

$$= r^{k-1}(r-h)\left[k(k+1)\Omega + \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\left(kr^k - h\frac{r^k - h^k}{r-h}\right)\frac{\partial^k \varphi}{\partial r^k}\right], \tag{6}$$

---

* «Das Anfangswertproblem usw.», Fundamenta Mathematicae, t. XXIV (1935) p. 213—246.

d'où en intégrant par rapport à r entre 0 et h nous obtenons:

$$\varphi(M_0)=\frac{1}{h^{k+1}}\int_0^h\left\{k(k+1)\Omega+\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\left(kr^k-h\frac{r^k-h^k}{r-h}\right)\frac{\partial^k\varphi}{\partial r^k}\right\}r^{k-1}(r-h)\,dr. \quad (7)$$

Soit le secteur $V(M)$ défini par les inégalités:

$$\left.\begin{aligned}0<r<h,\\ 0<\vartheta<\gamma,\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

et soit α l'angle de ce secteur.

En multipliant l'équation (7) par

$$(\cos\vartheta-\cos\gamma)\sin^{n-2}\vartheta\,d\vartheta\,d\gamma$$

et en considérant l'intégrale étendue au domaine $V(M)$, nous obtenons après avoir remplacé $drd\omega$ par $\frac{dx_1dx_2\ldots dx_n}{r^{n-1}}$ l'identité fondamentale:

$$\varphi(M)=\frac{n-1}{h^{k+1}(\varkappa_{n-1}\sin^{n-1}\gamma-\alpha\cos\gamma)}\overbrace{\int\int\ldots\int}^{n}_{V(M)}\left[k(k+1)\Omega+\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\left(kr^k-h\frac{r^k-h^k}{r-h}\right)\frac{\partial^k\varphi}{\partial r^k}\right]r^{k-n}(r-h)\cos\vartheta-\cos\gamma)\,dV. \quad (9)$$

Puisque la fonction r^{k-n} est à carré intégrable, nous pouvons appliquer à cette identité l'inégalité connue de Schwarz. On obtient alors la démonstration du théorème I.

En appliquant l'identité (9) à deux points voisins M_1 et M_2 à l'intérieur de D à distance δ et en soustrayant les résultats, nous obtenons:

$$\varphi(M_1)-\varphi(M_2)=L\overbrace{\int\int\ldots\int}^{n}_{V(M_1)-V(M_2)}\Delta_1dV-L\overbrace{\int\int\ldots\int}^{n}_{V(M_2)-V(M_1)}\Delta_2dV+$$
$$+L\overbrace{\int\int\ldots\int}^{n}_{V(M_1)\cdot V(M_2)}(\Delta_1-\Delta_2)\,dV=I_1-I_2+I_3. \quad (10)$$

Pour évaluer le deux premiers termes il suffit de tenir compte qu'en vertu des hypothèses faites, les domaines $V(M_1)-V(M_2)$ et $V(M_2)-V(M_1)$ sont petits.

Une analyse détaillée nous donne:

$$|I_j|^2\leqslant K_1\delta^2 \quad (j=1,2) \quad \text{pour } n \text{ paire} \quad (11)$$

et

$$|I_j|^2\leqslant K_1\delta \quad (j=1,2) \quad \text{pour } n \text{ impaire.}$$

D'autre part,

$$\left|\overbrace{\int\int\ldots\int}^{n}_{V(M_1)\cdot V(M_2)}(\Delta_1-\Delta_2)\,dV\right|\leqslant\overbrace{\int\int\ldots\int}^{n}_{D}|\Delta_1-\Delta_2|\,dV. \quad (12)$$

Décomposons la dernière intégrale en deux parties: l'une étendue à une petite sphère σ de rayon 2δ autour du point M_0 situé au milieu du seg-

ment M_1M_2, et l'autre au domaine restant $D-\sigma$. Nous obtenons au moyen des évaluations habituelles:

$$\Big[\overbrace{\int\int\cdots\int}^{n}_{\sigma}|\Delta_1-\Delta_2|\,dV\Big]^2\leqslant 2\Big[\overbrace{\int\int\cdots\int}^{n}_{\sigma}|\Delta_1|\,dV\Big]^2+$$

$$+2\Big[\overbrace{\int\int\cdots\int}^{n}_{\sigma}|\Delta_2|\,dV\Big]^2\leqslant B\delta^{2k-n}. \tag{13}$$

D'autre part, dans le domaine $D-\sigma$

$$|\Delta_1-\Delta_2|^2\leqslant C\left\{\sum\frac{\partial^n\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right\}^2\frac{\delta^2}{r^{2n-2k+2}}, \tag{14}$$

où r est la distance du point variable P de notre point M_0.

En appliquant encore une fois l'inégalité de Schwarz, nous obtenons:

$$\Big[\overbrace{\int\int\cdots\int}^{n}_{V(M_1)\cdot V(M_2)}(\Delta_1-\Delta_2)\,dV\Big]^2\leqslant\begin{cases}B\delta \text{ pour } n \text{ impaire},\\ B\delta^2\lg\delta \text{ pour } n \text{ paire},\end{cases} \tag{15}$$

d'où le théorème II suit immédiatement. Il n'y a aucune difficulté d'étendre les deux théorèmes démontrés pour les points intérieurs au cas des points du contour.

Considérons la suite des fonctions

$$\psi_\eta^{(s)}(r)=\int_h^{\sqrt{r^2+\eta^2}}\frac{(\sqrt{r^2+\eta^2}-t)^{s-1}\,t^{\frac{-n+1}{2}}}{\lg t}\,dt$$

pour un s fixe.

Cette suite appartient à $L_s(A)$ pour un A détérminé et η arbitraire. En même temps

$$\psi_\eta^{(k-1)}(0)\xrightarrow[\eta\to 0]{}\infty.$$

Donc, la proposition 1) est démontrée.

L'étude de la suite $\psi_\eta^{(k)}$ nous montre que les propositions 2) et 3) sont vraies.

Académie des Sciences de l'URSS.
Institut mathématique V. A. Stekloff.
Moscou.

Manuscrit reçu
le 10. II 1936.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 7 (84)

MATHÉMATIQUE

SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE DES OPÉRATIONS DANS LES ESPACES SEMI-ORDONNÉS

Par L. KANTOROVIČ (KANTOROVITCH)

(Présenté par N. N. Lusin, de l'Académie, le 21 I 1936)

Dans une note publiée dans les présents «Comptes Rendus» (1) j'ai donné la définition des espaces semi-ordonnés. J'ai considéré dans la même note des opérations qui transforment un espace de M. Banach dans un espace semi-ordonné. Je veux maintenant donner quelques définitions et théorèmes concernant les opérations définies dans un espace semi-ordonné ou dans un espace qui peut être normé à l'aide des éléments d'un espace semi-ordonné.

§ 1. Soit X' un ensemble semi-ordonné linéaire, c.-à.-d. X' satisfait aux axiomes des groupes I, II, III de ma note cité, seulement l'axiome I_6 doit être pris dans une forme affaiblie, notamment pour l'ensemble E qui ne consiste que de deux éléments. Soit Y' un espace semi-ordonné linéaire, c.-à.-d un ensemble qui satisfait aux axiomes des groupes I—V de ma note cité*.

Introduisons maintenant quelques définitions. Nous dirons qu'une opération $y'=\varphi(x')$ qui transforme X' dans Y' est une fonctionelle dans X' (relativement à Y'). Elle est additive, lorsque $\varphi(x_1'+x_2')=\varphi(x_1')+\varphi(x_2')$, et homogène, lorsque $\varphi(\lambda x')=\lambda\varphi(x')$ pour λ réel. Une fonctionnelle $y'\ \varphi=(x')$ est positive $\varphi>0$, lorsque $\varphi(x')\geqslant 0$, pour $x'\geqslant 0$ et $\varphi(x')$ n'est pas nulle identiquement. Enfin la fonctionnelle $y=\varphi(x')$ est regulière quand elle est additive et il existe une fonctionelle $y'=\varphi_1(x')$ additive, positive et telle que $\varphi(x')\leqslant\varphi_1(x')$ pour $x'\in X$, $x'\geqslant 0$.

Voici quelques théorèmes sur les fonctionnelles dont la partie est analogue aux quelques théorèmes bien connus (2).

Théorème 1. Une fonctionnelle additive $y'=\varphi(x')$ est complètement définie par des valeurs qu'elle prend pour les éléments $x'\geqslant 0$.

Théorème 2. Une fonctionnelle régulière est homogène.

La notion d'une fonctionnelle positive étant introduite, nous pouvons considérer l'ensemble des fonctionnelles additives comme un ensemble semi-ordonné faisant $\varphi_2>\varphi_1$, lorsque la fonctionnelle $\varphi_2(x')-\varphi_1(x')$ est positive. Mais nous pouvons établir de plus le théorème suivant:

* Remarquons que l'axiome I_5 n'était pas nécessaire pour les conclusions qui ont suit.

Théorème 3. Les fonctionnelles régulières dans X' (relativement à Y') forment un espace semi-ordonné, qui vérifie aux axiomes I — V[1].

Démonstration. Je ne veux qu'indiquer comment pourrait-on vérifier l'axiome I_6 sur l'existence de la borne supérieure précise d'un ensemble quelconque borné. Soit $\{\varphi_\xi\}$ un tel ensemble.

Définissons une fonctionnelle $y' = \varphi_0(x')$ pour $x' \geqslant 0$ par la relation

$$\varphi_0(x') = \sup_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n} \left[\varphi_{\xi_1}(x_1') + \varphi_{\xi_2}(x_2') + \ldots + \varphi_{\xi_n}(x_n')\right]$$
$$x_1' + x_2' + \ldots x_n' = x'; \quad x_i' \geqslant 0,$$

où la borne supérieure est prise relativement à toutes les groupes finis des fonctionnelles régulières φ_{ξ_1}, φ_{ξ_2}, ..., φ_{ξ_n} de la famille et relativement à toutes les décompositions de l'élément x'. Alors la fonctionnelle $y' = \varphi_0(x')$ ainsi définie est une fonctionnelle régulière et notamment la fonctionnelle dont l'existence était à démontrer: $\varphi_0 = \sup_\xi \varphi_\xi$.

Nous supposerons maintenant que X' soit aussi un espace semi-ordonné jouissant de plus la propriété suivante:

Étant donnée une suite des éléments x_n', $\lim_{n\to\infty} x_n' = 0$, il existe une suite de nombres réelles $\lambda_n \to \infty$, et telle que l'on a $\lim_{n\to\infty} \lambda_n y_n = 0$.

Cet axiome avait introduit M. Fichtenholz dans ses recherches sur les fonctionnelles linéaires.

Nous pouvons maintenant annoncer le

Théorème 4. Pour qu'une fonctionnelle additive $y' = \varphi(x')$ soit continue il faut et il suffit qu'elle soit régulière.

Remarque 1. Les résultats énoncés ici restent justes aussi dans les conditions plus faibles. C'est pour cela dans le théorème 3 la condition que l'espace X' soit linéaire, pourrait être affaiblie. Dans le théorème 4 il suffit de supposer que dans l'ensemble X' soit définie une notion de la limite jouissant de quelques propriétés nécessaires.

Remarque 2. On peut établir aussi que la fonctionnelle régulière jouit d'une autre propriété de la continuité. Soit la suite x_n convergante (*) vers x, c.-à-d. que de chaque suite partielle x_{n_k} on peut extraire une autre suite partielle $x_{n_{k_i}}$, telle que $\lim_{i\to\infty} x_{n_{k_i}} = x$.

Alors, dans ce cas, $\varphi(x_n')$ converge (*) vers $\varphi(x)$ dans l'espace Y'.

§ 2. Soient maintenant X et Y deux ensembles linéaires. Supposons que l'ensemble X soit «normé» à l'aide des éléments d'un espace semi-ordonné X', c.-à-d. qu' à chaque élément x de X corresponde un élément $x' = \|x\|$ de X', de manière que les conditions suivantes sont remplies:

1) $\|0\| = 0$; $\|x\| > 0$, pour $x \neq 0$.

2) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

3) $\|tx\| = |t|\,\|x\|$, lorsque t est un nombre réel.

4) Soit $\|x\| = x'$; $x' = x_1' + x_2'$; $x_1' > 0$; $x_2' > 0$. Il existe alors une décomposition $x = x_1 + x_2$ telle que $\|x_1\| = x_1'$; $\|x_2\| = x_2'$.

Nous réservons le signe $\|$ pour désigner la valeur absolue d'élément d'un espace semi-ordonné ou d'un nombre réel.

Supposons de manière analogue que l'espace Y soit normé à l'aide des éléments d'un autre espace semi-ordonné Y', omettant ici la condition 4).

Nous écrirons $x_n \to x$, quand $\|x_n - x\| \to 0$, et $y_n \to y$, quand $\|y_n - y\| \to 0$.

Soit $y = U(x)$ une opération qui transforme l'espace X dans Y. Nous disons qu'elle est continue, quand la relation $x_n \to x$ entraîne $U(x_n) \to U(x)$. Voici maintenant quelques théorèmes concernant des opérations ainsi définies.

Théorème 5. Une opération $U(x)$ additive et continue pour $x = 0$, est continue pour chaque x.

Théorème 6. Une opération additive et continue est homogène.

Théorème 7. Soit $y = U(x)$ une opération additive et continue. Il existe alors une fonctionnelle $y' = \varphi(x')$, définie dans X' pour $x' \geqslant 0$, jouissant des propriétés suivantes:

a) $\varphi(x') \geqslant 0$, pour $x' \geqslant 0$.

b) $\varphi(tx') = t\varphi(x')$, quand $t > 0$ est un nombre réel.

c) Il suit de $x_1' \leqslant x_2'$ que $\varphi(x_1') \leqslant \varphi(x_2')$.

d) $\varphi(x_1' + x_2') \leqslant \varphi(x_1') + \varphi(x_2')$

et telle que l'on a:

$$\| U(x) \| \leqslant \varphi(\| x \|). \qquad (\dagger)$$

Remarque 1. Entre les fonctionnelles φ jouissant des conditions du théorème 7 il existe la plus petite: cette fonctionnelle est définie comme il suit

$$\varphi(x') = \sup_{\| x \| \leqslant x'} \| U(x) \|;$$

nous la nommons norme de l'opération U:

$$\| U \| = \varphi.$$

Remarquons, au contraire, que l'existence d'une fonction jouissant des propriétés a) et, c) et telle que la relation (†) est remplie, est suffisante pour que l'opération additive U soit continue.

Remarque 2. Considérons un cas particulier important, où l'espace X' est l'espace de nombres réels, c.-à-d. X est un espace de M. Banach. Dans ce cas la fonctionnelle $\varphi(x')$ a la forme $\varphi(x') = y_0' \cdot x'$ et la relation (†) est

$$\| U(x) \| \leqslant y_0' \| x \|;$$

nous écrirons dans ce cas simplement $\| U \| = y_0'$.

Remarque 3. Considérons un autre cas particulier où l'espace Y coïncide avec Y', c.-à.-d., l'opération U est une fonctionnelle. On peut établir dans ce cas que la fonctionnelle φ, vérifie la condition:

$$\varphi(x_1' + x_2') \geqslant \varphi(x_1') + \varphi(x_2').$$

Dans ce cas φ est une fonctionnelle régulière dans X' (relativement à Y') et l'ensemble des opérations U peut être considéré comme un espace normé par des éléments d'un espace semi-ordonné (v. Théorème 3).

Voici maintenant quelques théorèmes sur les prolongements des fonctionnelles.

Théorème 8. Soit $y' = f_1(x)$ une fonctionnelle linéaire définie dans un ensemble linéaire $X_1 \subset X$ avec la norme $\| f \| = \varphi$. Alors cette fonctionnelle peut être étendue dans l'espace X tout entier avec la même norme.

Théorème 9. Soit $y' = f_1(x')$ une fonctionnelle additive et positive définie dans un sous-ensemble linéaire X_1' de l'espace X' et telle qu'il existe une fonctionnelle linéaire et positive $f_0(x')$ définie dans l'espace X' tout entier et jouissant de l'inégalité $f_0(x') \geqslant f(x')$. Alors on peut

étendre la fonctionnelle $f_1(x)$ sur l'espace X' de manière qu'elle reste additive et positive.

Théorème 10. Soit X un ensemble semi-ordonné linéaire et $X_1 \subset X$ son sous-ensemble linéaire. Supposons que l'espace X soit normé par des éléments d'un espace semi-ordonné X' de manière que les axiomes 1)—4) sont remplis pour X et pour X_1. Supposons de plus que la condition suivante soit satisfaite:

5) $\|x\| \leqslant \|x_1\|$, lorsque $|x| \leqslant |x_1|$.

Alors une fonctionnelle additive et positive définie dans l'ensemble X peut être prolongée dans l'espace X comme additive et positive.

Remarque. Il suffit d'appliquer ce théorème à l'espace de fonctions continues normé de manière ordinaire pour avoir les théorèmes de J. Radon [3] sur l'existence d'une fonction d'ensemble absolument additive correspondant à une fonction monotone et le théorème de H. Lebesgue [4] sur le prolongement de l'intégrale de Stieltjes.

Je veux donner maintenant une application de ces théorèmes au problème général des moments.

Théorème 11. Pour qu'il existe dans l'espace X une fonctionnelle linéaire f, avec $\|f\| = \varphi$, satisfaisant aux conditions

$$f(x_i) = y_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

il faut et il suiffit que l'on ait:

$$\left| \sum_1^r h_i y_i' \right| \leqslant \varphi\left(\left\| \sum_1^r h_i x_i \right\| \right)$$

quels que soient les nombres réels $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

L'ensemble X étant semi-ordonné et la condition 5) ($\|x\| \leqslant \|x_1\|$, pour $|x| \leqslant |x_1|$) étant remplie, il faut et il suffit de supposer pour que la fonctionnelle f pourrait être choisi comme positive que

$$\sum_{i=1}^r h_i y_i' \geqslant 0, \quad \text{lorsque} \quad \sum_{i=1}^r h_i x_i \geqslant 0.$$

Institut de Mathématiques et de Mécanique
de l'Université de Léningrad.

Manuscrit reçu
le 21 I 1936.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] Л. Канторович, C. R. Acad. Sci. URSS, IV, №1—2 (1935). [2] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa (1932). [3] J. Radon, Sitzungsber. Ak. Wiss., Wien, 11a, p. 1295—1438 (1913). [4] H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche de fonctions primitives, Paris, 1928.

Somptes Rèndus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 7 (84)

PHYSIK

DAS GESETZ DER ERHALTUNG DES IMPULSES DEI DER ANNIHILATION VON POSITRONEN

VON A. J. ALICHANJAN, A. J. ALICHANOV, L. A. ARZIMOVIČ

(Vorgelegt von A. F. Joffe, Mitglied der Akademie, d. 15. III. 1936)

Es ist wohl bekannt, dass im Prozesse der Annihilation von Positronen γ-Strahlen mit einer Energie von 500 U ausgesandt werden. Dies lässt offenbar darauf schlissen, dass bei der Annihilation ein schwach gebundenes Elektron der Partner des Positrons ist, wobei der Prozess in der Hauptsache dann vor sich geht, wenn das Positron nur über wenig Energie verfügt. Klemperer, der die Methode der Koinzidenz anwandte, hat gezeigt, dass bei der Annihilation gleichzeitig zwei Quanten ausströmen. Wir hatten uns die Aufgabe gestellt, zu ermitteln, ob denn nun wirklich hierbei beide Quanten in entgegengesetzten Richtungen auseinanderfliegen. Zu diesem Zwecke wurden auf jeder Seite der Positronenquelle je zwei Photonenzähler aufgestellt, der eine hinter dem anderen. Zwei weitere Zähler auf jeder Seite wurden dann ausserdem noch aufgestellt, damit die Wahrscheinlichkeit der Registrierung des Quantums auf diese Weise verdoppelt würde. Aus den gleichen Erwägungen heraus hatte man die Zähler innen mit einer Bleischicht von 0.2 mm Stärke ausgelegt. Die Entfernung von der Quelle aus bis hin zum Zentrum eines jeden der nächsten Zähler betrug in der einen Messungsreihe (A) 3.5 cm und in der zweiten Serie (B) 2.5 cm. Hierbei geriet in der ersten Messungsreihe 1/18 aller der aus der Quelle ausgeströmten Quanten in jedes Paar Zähler und in der zweiten Serie, dementsprechend, 1/13. In jeder Serie wurden diese Messungen anfangs in einer solchen Stellung vorgenommen, bei der die beiden Paare Zähler und die Quelle auf einer und derselben Ebene lagen, worauf dann—zur Kontrolle—das eine Zählerpaar um die Quelle herum um 90° gegenüber der ersten Stellung ($\perp$ Stellung) gedreht wurde. Die Quelle der Positronen war Radiophosphor, der bei dem Bombardieren von Aluminium mit α-Teilchen des Radiums RaC′ gewonnen wurde. Als Quelle der α-Teilchen diente eine Ampulle; die 500 Millicurie Rhadon enthielt.

Das während 10 Minuten bestrahlte Aluminium war von einer 2.5 mm dicken Messingschicht umgeben, und dann wurde 3 Minuten lang die Zahl der Koinzidenzen zwischen den beiden Zählerpaaren gemessen. Die auflösende Kraft des Verstärkers, der die Koinzidenzen absondert, betrug $2 \cdot 10^{-6}$ Minuten.

Die Resultate der Messung sind in der Tabelle aufgeführt:

	Zahl der spontanen Entladungen in einem Paar Zähler binnen 3 Min	Zahl der Entladungen in einem Paar Zähler von der Quelle der Positronen binnen 3 Min	Zahl der beobachteten Koinzidenzen binnen 3 Min.	Zahl der kosmischen und zufälligen Koinzidenzen binnen 3 Min.	Zahl der erwarteten Koinzidenzen binnen 3 Min.
Serie A					
Richtige Stellung .	510	935	4.7 ± 0.47	1.3 ± 0.2	5.4 ± 0.5
$\perp$ Stellung	490	890	2.8 ± 0.6	2.7 ± 0.45*	2.5 ± 0.3
Serie B					
Richtige Stellung .	516	1095	7.6 ± 1.0	1.1 ± 0.3	6.7 ± 0.7
$\perp$ Stellung	510	840	2.6 ± 1.0	3.6 ± 0.6*	2.5 ± 0.3

* Von diesen kosmische Koinzidenzen 1.5 ± 0.45.

Die Zahlen der letzten Tabellenspalte sind ausgerechnet aufgrund von Messungen des Nutzkoeffizienten des Paares Zähler, die in folgender Weise angestellt wurden. Gemessen wurde die Anzahl der Positrone aus den sie ausstossenden Quellen (Grössenordnung $1 \cdot 10^5$ in der Minute) und diese wurde dann mit der Anzahl der Quanten der Annihilation, die von den Zählern registriert war, verglichen. Der Koeffizient der Nutzwirkung für ein Paar Zähler stellte sich ungefähr auf $\frac{1}{80}$. Ausserdem wurde bei der Errechnung eine Korrektur von 20% vorgenommen, die durch die Absorbtion von γ Quanten im Messing und in den Wänden der Zähler veranlasst war. Aus den in der Tabelle enthaltenen Daten können die folgenden Schlüsse gezogen werden:

1. Bei der Annihilation von Positronen werden in der Tat zwei Quanten in direkt entgegengesetzten Richtungen ausgesandt, wie das Gesetz der Erhaltung des Impulses dieses verlangt.

2. Da unter unseren Bedingungen (in Serie A) nur gleichzeitige Aussendungen zweier Quanten registriert werden konnten, zwischen denen ein Scheidungswinkel von 180 bis 150° lag, darf angenommen werden, dass die Annihilation von Positronen bei einer Energie von höchstens 80 kV vonstatten geht.

Physikalisch-Technisches Institut.
Leningrad

Eingegangen
d. 15. III. 1936.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 7 (84)

PHYSIQUE

REPRÉSENTATION PHOTOGRAPHIQUE DU DIPOLE DE HERTZ

Par V. ARKADIEV, Membre correspondant de l'Académie, et A. MOROSOVA

Le présent travail avait pour but l'étude de l'image de diffraction du dipôle de Hertz au moyen de la méthode de photographie des ondes hertziennes (1).

Près du centre d'un miroir métallique sphérique concave de 30 cm de diamètre et de 25 cm de rayon de courbure était disposé un oscillateur de Hertz de 11 mm de longueur, dont l'image projetée sur du papier sensible

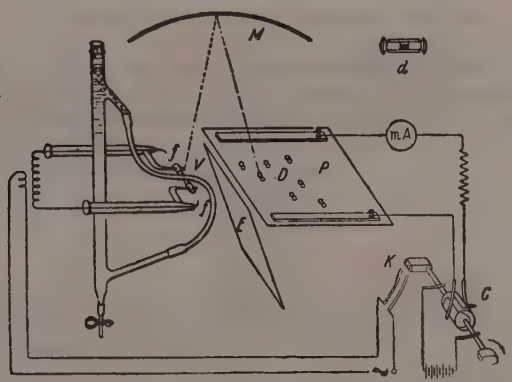

Fig. 1. Fixation de l'image électromagnétique d'un oscillateur.

électrochimique était mise au point à la lumière des étincelles conductrices de l'oscillateur (Fig. 1). La distance de l'oscillateur à son image était de 6 cm. Sur le papier on avait disposé d'une façon uniforme plus d'une cinquantaine de cohéreurs distants de 15 mm l'un de l'autre. L'image de diffraction de l'oscillateur hertzien ainsi obtenue était analogue à l'image de diffraction optique d'un point et se présentait comme une tache centrale constitueé par une multitude (près d'une centaine) de petites taches parfois entourée d'un anneau de diffraction composé de petites taches, plus clairsemées (Fig. 2). Étant donné, que les diverses images étaient toutes prises dans des conditions identique, on procédait pour mettre plus

de précision dans les résultats à la formation d'une image unique par la superposition d'une dizaine d'images séparées.

Fig. 2. Oscillateur et son image de diffraction.

Pour l'examin de l'éclairement de la tache centrale, celle-ci était subdivisée dans l'image fusionnée en zones concentriques de 0.4, 0.8, 1.2...cm de rayon, ayant pour centre celui de l'image optique du dipôle. La rela-

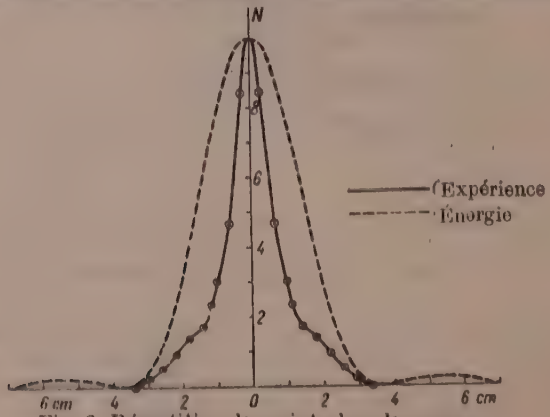

Fig. 3. Répartition des points dans les zones.

tion entre la densité moyenne des zones et leur distance du centre est représentée par un trait plain sur la fig. 3, qui donne également les courbes calculées sur la base de la théorie de la diffraction (²) optique de Frauenhofer par une ouverture circulaire pour $\lambda = 3.8$ cm; la courbe en pointillé représente

la répartition théorique de l'éclairement. La courbe expérimentale se trouve située plus bas que la courbe théorique. Pour déterminer la polarisation des ondes coorespondant à l'image, le papier, avec les cohéreurs placés dessus, furent disposés perpendiculairement à l'axe de l'oscillateur. Dans ces conditions on n'a pu découvrir aucune trace de l'action des ondes.

Pour se rendre compte de l'uniformité de l'éclairement des zones dans les différents azimuts, chaque zone de 1 cm de largeur fut divisée en 18 sec-

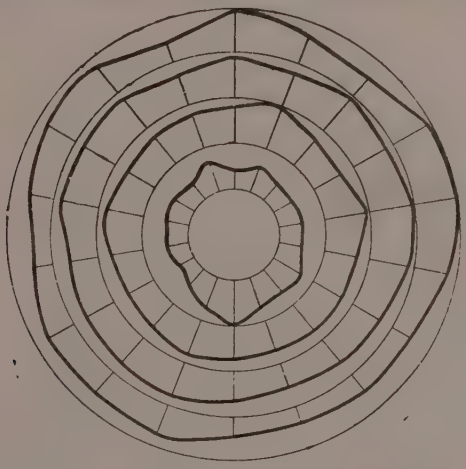

Fig. 4. Répartition des points dans les azimuts.

teurs de 20° chacun. Le nombre de petites taches par unité de surface dans chaque secteur d'une zone donnée, permetta de juger de la distribution de l'éclairement dans la zone considérée. Les résultats de pareil dénombrement sont représentés graphiquement sur la fig. 4, où l'on a porté dans la direction de chaque rayon la densité relative des points du secteur correspondant de chaque zone.

Manuscrit reçu
8. I. 1936.

[1] В. Аркадьев, C. R. Acad. Sci. URSS, III, 412 (1934); C. R. **199**, 848 (1934); Phys. ZS. d. Sow., **6**, 327 (1934); ZS. f. Phys., **92**, 194 (1934). [2] Н. М. Кислов, Теория оптических инструментов, p. 59, Moscou, 1915.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 7 (84)

PHYSICS

TO WHAT CLASS OF SYMMETRY DOES ORDINARY ICE BELONG?

By N. SELJAKOV

(Communicated by S. I. Wawilow, Member of the Academy, 5. III. 1936)

A large number of works has been devoted to the solution of the question to what class of symmetry ordinary ice belongs.

Ice is mostly assigned to the hexagonal system. Such prominent scientists as Groth (1), Tammann (2), Bridgman (3), W. H. Bragg and W. L. Bragg (4) and others subscribe to this opinion. X-ray investigations carried out by Rinne (5), Gross (6), Dannisson (7) and Barnes (8) confirm this assumption.

Mugge (9), however, is of the separate opinion on this question. According to his data, ice may be assigned to the rhombohedral division of the hexagonal system.

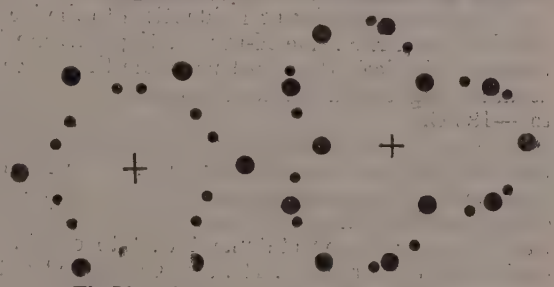

Fig. 1. α ice

Fig. 2. β ice

Taking in view these two different concepts, we have carried out an X-ray investigation of ice by the Laue method with the purpose to throw more light on the subject.

Ice was prepared by freezing distilled water from the surface in open air or in a cold room (the presence of snowflakes was excluded), at temperatures from —3 to —16° C.

The X-ray analysis was carried out in a cold room the temperature of which was maintained from —2 to —5°C. Small pieces of ice were broken off from the large ice plates obtained (1—2 mm thick) and mounted in the Laue camera in such a position that their surface was normal to the falling beam of X-rays (the surface of the test-pieces was parallel to the surface of the water that was frozen into ice). In such a way 12 test-pieces of ice were examined. The 12 X-ray photographs obtained may be divided into two groups as shown in Figs 1 and 2.

The table shows the temperatures at which the different modifications of ice are formed.

Temperature °C (below zero)	Modification of ice	Temperature °C (below zero)	Modification of ice
3	α	8	β
3.5	α	8.5	α
4	α	10.5	β
5	β	12	β
6	α	13	β
7	β	16	β

The data shown in the table make clear the law governing the formation of the different modifications of ice. α ice is formed under conditions when the temperature of the ambient air is somewhat below zero, and β ice when there is a considerable frost.

The test-pieces were examined optically in the polarized microscope and it was found that both α ice and β ice are optically anisotropic (four times repeated extinction of the field of view in the crossed nicols).

Hence the question, to what class of symmetry ordinary ice belongs, may be answered as follows. There exist two modifications of ice: α ice and β ice. The former belongs to one of the four classes D_{6h}, D_6, C_{6v} and D_{3h} [10] (hexagonal ice); the latter, to one of the two classes C_{3i} and C_3 [10] (rhombohedral ice). Both modifications are stable (the length of exposure was from 3 to 20 hours), and β ice did not change into α ice (under the conditions of the author's experiments).

The α ice found by us is identical to the ice examined by Rinne, Gross, and Barnes (their Laue X-ray photographs are identical to our X-ray photographs of α ice). It is most probable that α ice does not change into β ice, as according to Barnes α ice is stable in the temperature range from 0 to —183°C.

We may quite logically infer that the supercooled condition of the water surface was the source of β ice formation. The existence of an intermediate temperature range of air from —5 to —10° C within which either α or β ice may be formed does not raise any question, taking in view the above mentioned statement that to obtain β ice water must be supercooled from the surface. It must be pointed out that the freezing of water was carried out in one of the rooms of a water-tower 20—25 m high. During observation by naked eye of the condition of the water surface an irregular agitation of the surface could be seen. This agitation was caused by the town traffic and by the service of trains, as a railway line was near by. More quiet conditions would probably cause supercooling of water surface at higher temperatures and *vice versa*.

REFERENCES

[1] Groth, Chemische Kristallographie, **1**, 66 (1907). [2] G. Tammann, ZS. f. Phys. Chemie, **72**, 609 (1910). [3] P. W. Bridgman, ZS. f. Anorg. Chemie, **77**, 439 (1912). [4] W. H. Bragg and W. L. Bragg, X-rays and Crystal Structure, 177 (1925). [5] Rinne, Ber. Verh. Ges. Wiss. Math. Phys., **69**, 57 (1917). [6] Gross, Centr. Min. Geol., 201 (1919). [7] Dannison, Phys. Rev., **17**, 20 (1921). [8] W. Barnes, Proc. Royal Society, A, **125**, 671 (1929). [9] O. Mügge, Centrl. Mineral., 137 (1918). [10] E. Schiebold, Die Laumethode, Bd. 1, p. 65 (1932); A. Schleede und E. Schneider, Röntgenspektroskopie und Kristallstrukturanalyse, II, 259; R. Glocker, Materialprüfung mit Röntgenstrahlen, p. 215 (1927).

Institute of Experimental Meteorology.
Leningrad.

Received
2. III. 1936.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 7 (84)

PHYSICS

THE ROTATION-VIBRATION WAVE EQUATION FOR A POLYATOMIC MOLECULE

By M. ELIAŠEVIČ (M. ELIASHEVICH)

(Communicated by S. I. Wawilow, Member of the Academy, 15. II. 1936)

It is desirable to set up a rotation-vibration wave equation for a polyatomic molecule, that would be well suited for applications. The problem may be divided into two parts.

At first, it is important to define carefully the coordinates describing the rotation and the normal coordinates describing the vibration, in order to obtain a correct zero approximation. This question has been recently considered by Eckart (1). Then it is necessary to set up the wave equation in terms of these coordinates. It may be done most conveniently by applying the law of transformation of conjugate momenta in classical mechanics (2).

As a starting point the wave equation for a system of N particles is taken:

$$(T + U)\,\psi = E\psi, \tag{1}$$

where the kinetic energy operator is given by

$$T = -\frac{h^2}{8\pi^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{1}{m_i}\frac{\partial^2}{\partial x_{i\alpha}^{12}} \tag{2}$$

and the potential energy U depends only on the relative distances of the particles and is supposed to have a minimum for some configuration of the system. x_{i1}^1, x_{i2}, x_{i3} are the cartesian coordinates of the i-th particle in a fixed system of coordinates, m_i being its mass.

It is convenient to consider the centre of mass of the system as fixed and to reduce the problem of N particles to the problem of $N-1=n$ fictitious particles [for instance Jacobi's coordinates may be used (2)]. Then

$$T = -\frac{h^2}{8\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{1}{\mu_k}\frac{\partial^2}{\partial x_{k\alpha}^1}, \tag{3}$$

where x_{k1}, x_{k2}, x_{k3} are the cartesian coordinates of the k-th fictitious particle in the fixed system, μ_k being its reduced mass. This operator corresponds to the classical kinetic energy of the internal motion

$$T_{\mathrm{cl}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{\mu_k} p_{k\alpha}^2 , \tag{4}$$

where

$$p_{k\alpha} = \mu_k \dot{x}_{k\alpha} \tag{5}$$

is the momentum conjugated to the coordinate $x_{k\alpha}$.

Let us define the new coordinates in the simplest possible way.

At first we introduce a rotating system of axes, so that

$$x_{k\alpha} = \sum_{\beta=1}^{3} K_{\alpha\beta} y_{k\beta} , \tag{6}$$

where $K_{\alpha\beta}$ are the direction cosines of the rotating axes; they are functions of three independent variables, *i. e.* the Eulerian angles.

Now let be

$$y_{k\beta} = y_{k\beta}^0 + \sum_{\lambda=1}^{3n-3} c_{k\beta\lambda} \xi_\lambda , \tag{7}$$

where $y_{k\beta}^0$ are the values of the coordinates that correspond to the equilibrium configuration. The $3n\,(3n-3)$ coefficients $c_{k\beta\lambda}$ may be chosen such that the $3n-3$ new coordinates ξ_λ should be normal vibrational coordinates. This leads to $(3n-3)^2$ relations between the $c_{k\beta\lambda}$. In order to remove the arbitrariness let we impose the condition that the angular momentum associated with the vibrations (*i. e.* with the change of the ξ_λ) should vanish when the coordinates $y_{k\beta}$ have values equal to $y_{k\beta}^0$. In this way we obtain $3\,(3n-3)$ new equations and thus the coefficients $c_{k\beta\lambda}$ are completely determined. Then the new coordinates will be uniquely defined. These coordinates are those used by Born and Heisenberg ([3]), Eckart ([1]), and Jahn ([4]). Only in the case of linear molecules the method described above cannot be applied, as has been shown by Eckart.

The kinetic energy expressed in terms of the new coordinates will be

$$T_{\mathrm{cl}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} \Omega_\alpha \Omega_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \dot{\xi}_\lambda^2 + \sum_{\alpha\lambda\mu} B_{\alpha\mu\lambda} \xi_\mu \dot{\xi}_\lambda \Omega_\alpha , \tag{8}$$

where Ω_1, Ω_2, Ω_3 are the components of the angular velocity $\vec{\Omega}$ of the rotating system. The first term gives the rotational energy, the second, the vibrational energy and the third, the rotation-vibration coupling. The last term vanishes when all ξ_λ are equal to zero. $B_{\alpha\mu\lambda}$ are constants and

$$A_{\alpha\beta} = A_\alpha \delta_{\alpha\beta} + \sum_{\lambda} A_{\alpha\beta\lambda} \xi_\lambda + \sum_{\lambda\mu} A_{\alpha\beta\lambda\mu} \xi_\lambda \xi_\mu , \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \tag{9}$$

where A_1, A_2, A_3 are the principal moments of inertia for the equilibrium configuration (it may be assumed without loss of generality that for the equilibrium configuration the rotating axes are principal axes of inertia) and $A_{\alpha\beta\lambda}$ and $A_{\alpha\beta\lambda\mu}$ are some constants.

Now let us proceed to the most essential part of the problem, namely the direct transformation of the wave equation.

To transform the kinetic energy operator (3), the transformation law for the operators of differentiation may be conveniently made use of. As is well known the relation

$$\frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_k a_{ik} \frac{\partial}{\partial q'_k} \tag{10}$$

is of the same form as the relation that holds for the conjugate momenta:

$$p_i = \sum_k a_{ik} p'_k . \tag{11}$$

Let us apply this method in the case under consideration. We have

$$\left.\begin{aligned} m_\alpha &= \frac{\partial T_{\mathrm{cl}}}{\partial \Omega_\alpha} = \sum_\beta A_{\alpha\beta}\Omega_\beta + \sum_{\lambda\mu} B_{\alpha\mu\lambda}\xi_\mu \dot{\xi}_\lambda \quad (\alpha = 1, 2, 3), \\ P_\lambda &= \frac{\partial T_{\mathrm{cl}}}{\partial \dot{\xi}_\lambda} = \dot{\xi}_\lambda + \sum_{\alpha\mu} B_{\alpha\mu\lambda}\xi_\mu \Omega_\alpha \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, 3n-3 , \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

where m_1, m_2, m_3 are the components of the total angular momentum $\vec{m}$ along the rotating axes, as can be easily verified (of course, these components are not ordinary conjugate momenta like the p_λ; nevertheless the transformation law for conjugate momenta is still applicable).

Hence we obtain, using (5), (6), and (7):

$$p_{k\alpha} = \mu_k \vec{k}_d \sum_\beta K_{\alpha\beta} \left\{ \vec{k}_\beta \Big[\sum_\gamma (\vec{k}_\gamma \times \vec{r}_k)\, \Omega_\gamma \Big] + \sum_\lambda c_{k\beta\lambda} \dot{\xi}_\lambda \right\} , \tag{13}$$

where

$$\left.\begin{aligned} \Omega_\gamma &= \sum_\varepsilon (A'^{-1})_{\gamma\varepsilon} (m_\varepsilon - \zeta_\varepsilon), \\ \dot{\xi}_\lambda &= p_\lambda - \sum_{\gamma\varepsilon\mu} B_{\gamma\mu\lambda} \xi_\mu (A'^{-1})_{\gamma\varepsilon} (m_\varepsilon - \zeta_\varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$, $\vec{k}_3$ are the unit vectors along the rotating axes, $\vec{r}_k$ is the vector that determines the position of the k-th particle, A'^{-1} is the matrix reciprocal to the matrix A' having as elements $A_{\alpha\beta} - \sum_{\lambda\mu\nu} B_{\alpha\lambda\mu} B_{\beta\nu\mu} \xi_\lambda \xi_\nu$, $\zeta_\varepsilon = \sum_{\lambda\mu} B_{\varepsilon\mu\lambda} \xi_\mu p_\lambda$ is (approximately) the angular momentum associated with the vibrations.

(13) together with (14) is a special case of the relations (11), m_ε and p_λ being the transformed momenta. These equations still hold if $p_{k\alpha}$ is replaced by $\frac{\partial}{\partial x_{k\alpha}}$, p_λ by $\frac{\partial}{\partial \xi_\lambda}$, m_α by the operators M_α of infinitesimal rotations around the moving axes and ζ_ε by $p_\varepsilon = \sum_{\lambda\mu} B_{\varepsilon\mu\lambda} \xi_\mu \frac{\partial}{\partial \xi_\lambda}$.

The operator of the kinetic energy (3) becomes

$$T = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2} \sum_{k\alpha} \frac{1}{\mu_k} \left\{ \mu_k \sum_\beta K_{\alpha\beta} \Big[\sum_\gamma \vec{k}_\beta (\vec{k}_\gamma \times \vec{r}_k) (A'^{-1})_{\gamma\varepsilon} (M_\varepsilon - P_\varepsilon) + \right.$$
$$\left. + \sum_\lambda c_{k\beta\lambda} \Big(\frac{\partial}{\partial \xi_\lambda} - \sum_{\gamma\varepsilon\mu} B_{\gamma\mu\lambda} \xi_\mu (A'^{-1})_{\gamma\varepsilon} (M_\varepsilon - P_\varepsilon) \Big) \Big] \right\}^2 . \tag{15}$$

This may be written in the form:

$$T = -\frac{h^2}{8\pi^2}\left\{\sum_{\alpha\beta}\left|\frac{1}{A_\alpha}\delta_{\alpha\beta} - \sum_{\lambda}\frac{A_{\alpha\beta\lambda}}{A_\alpha A_\beta}\xi_\lambda - \sum_{\lambda\mu}\frac{(A_{\alpha\beta\lambda\mu} - \sum_{\nu} B_{\alpha\lambda\nu}B_{\alpha\mu\nu})}{A_\alpha A_\beta}\xi_\lambda\xi_\mu + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{\gamma\lambda\mu}\frac{A_{\alpha\gamma\lambda}A_{\gamma\beta\mu}}{A_\alpha A_\gamma A_\beta}\xi_\lambda\xi_\mu \pm O(\xi^3)\right|(M_\alpha - P_\alpha)(M_\beta - P_\beta) + \sum_{\mu}\frac{\partial^2}{\partial\xi_\mu^2}\right\} +$$

$$+ \text{operators linear in } \frac{\partial}{\partial\xi_\mu} + \text{operators linear in } M_\alpha. \qquad (16)$$

The first term in the brackets will be reduced to the usual expression for the rotational kinetic energy when all ξ vanish, the second term gives the vibrational kinetic energy.

The wave equation (1), when T is given by (16) and when the potential energy U is also expressed in the terms of the coordinates ξ_λ (this may be easily done), is of the form convenient for the applications to special cases.

It is a pleasure to acknowledge my indebtedness to Prof. V. Fock for the discussion of the results of this paper.

State Optical Institute
Leningrad

Received
15. II. 1936

REFERENCES

[1] C. Eckart, Phys. Rev., **47**, 552 (1935). [2] M. Eliashevich, Phys. ZS. d. Sow., **6**, 569 (1934). [3] M. Born und W. Heisenberg, Ann. d. Phys., **74**, 1 (1924). [4] H. Jahn, Ann. d. Phys., **23**, 529 (1935).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 7 (84)

GEOLOGY

ON THE *FUSULINIDAE* AND THE STRATIGRAPHIC SUBDIVISION OF THE OIL-BEARING LIMESTONES IN THE STERLITAMAK DISTRICT

By D. RAUZER-ČERNOUSOVA

(Communicated by A. D. Archangelskij, Member of the Academy, 9. I. 1936)

Three and a half years divide the time of the first gushing discharge of oil out of two wells in the Ishimbayevo oil-field. In the meantime, no less than 77 oil-wells have been sunk in this new district; most of them are in operation, and in 1935, the oil-field was expected to yield as much as 500 000 tons of oil, in compliance with the instructions of the Party and the Government as to the placing of the newly discovered Ural oil-bearing district into the front rank of our oil-fields.

So great an extension of oil production cannot, however, be achieved without a thorough knowledge of the geology of the oil-field. Unfortunately, however, no clear idea has so far been gained of the tectonics and stratigraphy of the Ishimbayevo oil-field, the most notable gap in this respect being the stratigraphy of the oil-bearing limestones. And, in the absence of stratigraphical knowledge, any conjectures as to the tectonics of these buried calcareous structures are no more than guesswork or gratuitous analogies.

It was in 1932 that these oil-bearing limestones were first struck by boreholes, but the study of their stratigraphy has so far made but little progress. At the congress of oil-geologists held in Moscow in 1934, much prominence was given to the question as to whether «erosion» or «reefs» are responsible for the origin of the buried relief of the Ishimbayevo limestones. Most geologists regarded them as analogues of the Chusovaya river oil-bearing limestones, and only emphasized some peculiar features of their tectonics.

A little later, A. A. Blohin (2), while deprecating the suggested analogies as devoid of foundation, drew attention to the fact that the Chusovaya limestones differed in texture from the Ishimbayevo limestones, and identified in the latter a number of oil-bearing layers, being mainly guided by their lithological characteristics, in the hope of thus getting a better insight into the tectonics of the limestones. It is also according to their lithological characteristics that these oil-bearing limestones have been subdivided by a group of geologists of «Wostokoneft» Trust (3).

That the stratigraphic subdivision of the oil-bearing limestones of the Ishimbayevo oil-field was unreliable had been felt by all those who had

had anything to do with them, and, finally, the Central Laboratory of Scientific Research of «Vostokoneft» Trust, taking into account the stratigraphic importance of microfauna, originated in 1935 a systematic study of the *Foraminifera* found in the wells and appointed a number of its young paleontologists to do the work. In May, 1935, the Laboratory signed an agreement with the Institute of Geology of the Academy of Sciences as to consultations on the subject of that work.

The *Foraminifera* that I identified during my work at the Laboratory in June last from among the material carefully selected and classified by the staff of the Laboratory, as well as from some thin sections of some wells examined by me, have enabled me tentatively to isolate in the limestones two stratigraphic horizons divided by a third one less clearly defined. The upper horizon is characterized by masses of *Pseudofusulina lutugini* (Schellw.), and the lower one by a complex of *Fusulinidae* of the *Schwagerina* horizon *(Schwagerina princeps* Ehrnb., *Pseudofusulina uralica* (Krotow) and its varieties: var. *sphaerica* Bel. and var. *parva* Bel., *Ps. mölleri* (Schellw.), *Ps. prisca* (Ehrnb.), *Ps. alpina* (Schellw.), *Staffella dagmarae* Dutk., *St. pseudosphaeroidea*, *Fusiella* sp., and others. The intermediate horizon is characterized by the presence of the *Pseudofusulina anderssoni* (Schellw.) group.

The energetic study of the foraminifera of the oil-wells conducted by the staff of the Laboratory in the two subsequent months fully confirmed the stratigraphic scheme outlined by myself, and, on my second visit to the Trust, I was able to examine the materials yielded by a greater number of sections. This examination, combined with my former definitions of fauna from the Sterlitamak wells, as well as a comparison of the results obtained with those of other sections known to me, enables me to suggest the following subdivision of the Ishimbayevo oil-bearing limestones.

1. The horizon containing masses of *Pseudofusulina lutugini* (Schellw.) has been discovered in the oil-wells of the central portion of the east dome (Nos 137, 138, 164, 188, and, possibly, 139), at depths ranging from 180 to 400 m*, and has a maximum thickness of about 200 m in the oil-well No 188. In the west dome, this species has so far only been encountered in two wells, No 222 and 225, at a depth of 860 and 432—460 m respectively.

Ps. lutugini is generally found in masses and forms well-defined streaks in the limestone series, in exactly the same manner as in the Chusovaya and Cherdyn districts. It does not differ as to species from the northern specimens.

II. At a depth of 300 m below the last streaks containing *Ps. lutugini*, *i. e.* beginning from 705 m below sea level, oil-well No 188 of the east dome crosses a characteristic complex of the *Schwagerina* horizon containing the above *Foraminifera*. The complex has so far been traced over a depth of 200 m. The same characteristic association of *Fusulinidae* has been encountered by oil-wells Nos 116, 129, 139, 141, 147 of the east dome in the range of 650 to 950 m, and by oil-well No 218 on the left bank of Belaya river. This complex is most clearly marked in oil-wells Nos 116 and 141.

III. The horizon containing *Ps. lutugini* and the one with the *Schwagerina* complex are separated by a seam of 200—300 m, microfauna of which has not so far been fully identified. The *Fusulinidae* occur less frequently within this range, that is chiefly due to the occurrence at those depths of «lattice-like» limestones. Several characteristic species of the *Pseudofu-*

* All notations are in metres below sea-level.

sulina anderssoni and the *Ps. verneuili* groups have, however, been discovered here, and further study may possibly lead to the identification of individual stratigraphic units characterized by a fauna peculiar to each of them. This complex has been discovered in oil-wells Nos 129, 141, 147, 207, 222 and, according to D. F. Shamov's data, in oil-wells Nos 139, 164 and 188.

What are the characteristics of those horizons that have been identified from the *Foraminifera* they contain? Within the limited area of the Ishimbayevo oil-field these horizons are easily identifiable from certain characteristic *Fusulinidae* and can certainly be used as a basis for the correlation of the oil-wells, if only within series of considerable thickness; they may possibly serve in future to outline smaller zones, if only in a confined locality. These horizons, however, exceed by far the limits of purely local correlation complexes, since they may be traced over a long distance along the strike.

The *Ps. lutugini* horizon is well developed along the whole of the western slope of the Middle Urals and that of the Southern portion of the North Urals (5) and has now been traced further south right into the Sterlitamak district. Analogues of this horizon may be found in the deposits of upper *Fusulinidae* limestones in the Chusovaya oil-bearing district, in the Irgha horizon, and also in the Ossipov Complex in the Ufa plateau, and the Artinsk deposits to the east of Ufa plateau (according to Ossipov).

All the various forms of association of the *Fusulinidae* of the *Schwagerina* horizon enumerated above are undoubtedly a permanent complex accompanying the *Schwagerina* of the *Schwagerina princeps* group and are everywhere encountered in a definite stratigraphic sequence with the overlying and the underlying microfaunal complexes. This association of the *Fusulinidae* is therefore one of the characters of an independent stratigraphic horizon. Analogues of it may be found in some isolated mountains of the Sterlitamak district, in the *Schwagerina* horizon of Samarskaya Luka, in the lower *Fusulinidae* limestones (C_3^B of Dutkevitch) of the section of Chusovaya horizons near Usava, in the Kolvo-Vishera district, etc.

Our study of the *Fusulinidae* of the Sterlitamak district is but a preliminary one; it enables us, however, to make some general inferences. They are:

1. The analogy so frequently drawn between the Chusovaya and the Ishimbayevo oil-bearing limestones does not hold water. In the former, oil occurs in the reef limestones lying above the *Pseudofusulina lutugini* horizon. In the latter, oil occurs in the *Ps. lutugini* horizon, and, more frequently, in the underlying series containing the *Ps. anderssoni* group and the *Schwagerina* horizon, *i. e.* in deeper lying stratigraphic horizons, which in the Ishimbayevo oil-bearing district occur at a shallower depth from the surface than they do in the Chusovskiye Gorodki (the roof of the *Schwagerina* horizon is encountered at a depth of about 650—700 m in the east dome, and at a depth of about 900 m in the Chusovaya dome).

2. The *Schwagerina* horizon, characterized by the presence of *Schwagerina princeps* (if only represented by a few specimens) and by the *Fusulinidae* complex associated with it, has in the Sterlitamak oil-wells a thickness of at least 200 m, as shown by preliminary data. This shows that I was not mistaken in assigning to the *Schwagerina* horizon a series of a considerable thickness in the more northern districts, on the ground of the occurrence of the characteristic *Fusulinidae* complex. The accumulation of masses of *Schwagerina princeps* itself, being indicative of a certain facies rather

than of age, may, to all appearances, be encountered at different stratigraphic levels within that horizon.

3. One of such accumulations of *Schwagerina princeps* has been discovered in the neighbourhood of the Ishimbayevo oil-field. The 70 metre-thickness of limestones which make up the isolated mountains of the Sterlitamak district is an analogue not of the whole thickness of the oil-bearing limestones, not even of the whole of the *Schwagerina* horizon, but far rather only of its upper portion.

4. The ascertained absence of the *Ps. lutugini* horizon in a number of oil-wells of the east dome shows that the relief of the buried limestones is due, amongst other factors, also to their erosion.

5. On the other hand, micropaleontological study has still further emphasized the importance of tectonic factors in the formation of the calcareous structures, since it has established a correlation between such strata as are encountered by oil-wells at depths of some — 650 m and the limestones found at +394 m. At the same time, a comparison of a number of sections of the east dome has brought to light the fact that the horizons identified by us have a fairly gentle dip within the limits of that dome.

Institute of Geology
Academy of Sciences of USSR
Moscow.

Received
9. I. 1936

REFERENCES

[1] Н. Герасимов, Учен. зап. Казан. гос. унив., т. 94, кн. 1, вып. 3 (1934). [2] А. А. Блохин, Нефт. хоз., № 6 (1934). [3] А. Богданов, Я. Давидович и Г. Егер, Сборник «Нефть в Башкирии« (1935). [4] Новая нефтяная база СССР на востоке, Востокнефть, Горн.-геол.-нефт. издательство. [5] Раузер-Черноусова, Бюлл. Моск. общ. испыт. природы, отд. геолог., т. XIII (1935).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 7 (84)

EXPERIMENTELLE ZOOLOGIE

DIE ROLLE DES NERVENSYSTEMS IN DER REGENERATION DER EXTREMITÄT DES AXOLOTLS

Von J. M. URANOVSKIJ

(Vorgelegt von A. A. Richter, Mitglied der Akademie, d. 23. I. 1936)

Das Problem des Zusammenhangs zwischen dem Nervensystem und den Prozessen der Regeneration ist theoretisch wichtig für das Verständnis des Wesens der Ontogenese und der Physiologie der Nervenfunktion; es ist ausserdem praktisch wichtig für die Pathologie, Neurologie und Chirurgie.

Die Diskussion über die Rolle des Nervensystems in den Regenerationsprozessen der post-embryonalen Stadien dauert schon mehr als drei Jahrzehnte.

Abgesehen vom Problem der Lokalisierung können die Forscher je nachdem, wie sie die Frage über den Zusammenhang zwischen Nervensystem und Regeneration beantworten, in zwei Lager aufgeteilt werden. Die Anhänger des ersten Lagers (C. Herbst, T. H. Morgan, G. Wolff, G. Tornier, B. Dürken u. a.) betrachten den Einfluss des Nervensystems als für den normalen Verlauf des Regenerationsprozesses unbedingt notwendig. Dagegen stehen die Anhänger des zweiten Lagers (Barfurth, Loeb, Wilson, Goldfarb, Carrière, Goldstein, Nussbaum, Harrisson, Braus, Hamburger u. a.) auf dem Standpunkt, dass die morphogenetischen Prozesse von der Nervenfunktion unabhängig sind. Im Laufe der letzten 15 Jahre waren es O. Schotté, E. Guyénot, P. Locatelli und P. Weiss, die das Problem des Zusammenhanges zwischen Nervensystem und Regeneration bei Urodelen vielfach und eingehend studiert haben.

Bei Vorhandensein schroffer Gegensätze in der Frage der Lokalisierung sind alle diese Forscher in der Anerkennung des Nervensystems als eines zur Regeneration absolut notwendigen Faktors einig. Jedoch ist die Anerkennung der absoluten Bedeutung des Nervensystems für die Regeneration mit einer Reihe biologischer, wissenschaftlich unerschütterlich festgelegter Grundsätze unvereinbar. Insbesondere sind es die von dem Zusammenhang zwischen dem im Vergleich mit Nervensystem phylogenetisch älteren endokrinen System und den Regenerationserscheinungen zeugenden Tatsachen, die dieser Ansicht widersprechen.

Auch die Angaben der Teratologie (insbesondere diejenigen der Amyelie bei Tieren und Menschen), sowie die Angaben der Chirurgie sprechen dafür, dass bestimmte Regenerationsprozesse vom Nervensystem in einem gewissen Masse unabhängig sind.

Das Objekt meiner in der Abteilung von Prof. J. Schaxel (Laboratorium für experimentelle Zoologie der Akademie der Wissenchaften der UdSSR)

durchgeführten Forschungsarbeit waren Axolotl einer Generation der Jahre 1933 und 1934. Es wurde der Einfluss des Nervensystems auf folgenden Stadien der Regeneration studiert: Anfangsstadium, Knospen-, Anlage- und Fingerbildungsstadium. Als Objekt diente die hintere Extremität und dementsprechend der *Plexus lumbo-sacralis*.

Um die Ausschaltung des *Plexus* und somit die Entnervung der Extremität zu erzielen, wurde der Schnitt in erster Zeit kreisförmig (zirkulär) von unten her nach aussen und nach oben zu kaudal um die Ansatzstelle der Extremität herum vorgenommen. Da jedoch bei dieser Art von Schnitt die Wunde an dem unteren Teil des Bauchfells schlecht heilt und öfter Nekrosen entstehen, die den Verlust der Extremität bis zum Becken zur Folge haben, wurde der kreisförmige Schnitt durch einen geraden Schnitt am Bauchfell ersetzt. Indem man einen geraden Schnitt durch die Haut vornimmt, durchkreuzt man nach ungefähr 5 Metameren das *Osileum* und die *Art. iliaca* und schneidet tief in die weichen Gewebe hinein; nachdem man die Ränder der Wunde auseinandergespreizt hat, stellt man 3 weisse Strange des *Plexus* fest, die auf der peritonealen Fläche nach aussen zu liegen. Nach Entfernung von 5 mm langen Stücken eines jeden Nervs wird die Wunde geschlossen und es werden je 3—4 Seidennähte auf jede Wunde aufgelegt.

Die Hauptschwierigkeit bestand darin, dass das Nervensystem des Axolotls in hohem Masse die Regenerationsfähigkeit besitzt; dadurch ist es schwierig die Extremität längere Zeit in entnervtem Zustande zu erhalten. Bei einigen Serien habe ich mittels wiederholter Schnitte in Zeitabschnitten von ca. 25 Tagen der Regeneration vorzubeugen versucht. Ich betrachtete wie Hamburger die Extremität als entnervt, wenn sie auf einen Nadelstich nicht reagierte und daraufhin keine Bewegung aufwies.

Ausserdem wandte ich die Methodik der Deviation des *Nervus ischiadicus* an. Die Untersuchungsobjekte wurden in Serien aufgeteil. Um histologische Präparate zu erhalten wurde das Material mit Zenker-Formol fixiert und nach Mallory gefärbt. Um Präparate des Extremitätsskeletts zu erzielen, wurde das Material für die Dauer von 24 Stunden in ein Thermostat bei 37° in 15% Alkohol gelegt, wonach die weichen Teile sich leicht mit Hilfe einer Nadel entfernen liessen.

Das erste und allgemeinste Ergebnis dieser Versuchsarbeit besteht darin, dass bei Ausschaltung des Einflusses des Nervensystems der Regenerationsprozess nicht in Stockung gerät auch nicht völlig aufhört, sondern eine Zeitlang in langsamerem Tempo fortfährt. Wir haben keine genügenge Gründe um zu behaupten, dass der gesamte Regenerationsprozess beim Axolotl—vom Knospenstadium bis zur völligen Ausgestaltung der Extremität—unter Ausschaltung der Einflusses des Nervensystems möglich sei. Jedoch sind wir berechtigt anzunehmen, dass die entnervte Extremität eine gewisse Regenerationsfähigkeit beibehält, wodurch unter Ausschaltung des *Plexus* die Bildung des Blastems und des Knospenstadiums beginnt und der Übergang zumindest zum Stadium, das auf dasjenige, in dem die Operation der Ausschaltung des Nervensystems vorgenommen wurde, folgt, vor sich geht, der Regenerationsprozess also, wenn auch in verzögertem Tempo in einem gewissen Ausmasse vorwärtsschreitet, indem er ein Regenerat mit gewissen pathologischen Elementen (auf die wir weiterhin noch zurückkommen werden) ergibt.

Diese Tatsache widerspricht der Behauptung über das sofortige Aufhören des Regenerationsprozesses bei Ausschaltung des Nervensystems, die sowohl von alten Autoren, wie, z. B., G. Wolff, als auch von neuen aufgestellt worden ist.

Die Gegensätze zwischen den durch mich und durch P. Locatelli erzielten Ergebnissen glaube ich auf den Einfluss des tiefen Traumas und der Ernährungsstörungen zurückführen zu müssen, sowie auf den damit verbundenen Einfluss der Störungen des endokrinen Systems, die als unvermeidliche Folgen des durch P. Locatelli vorgenommenen kreisförmigen Durchschnitts der weichen Teile am Ausgangspunkt der Extremität auftreten müssen.

Ebenso, wie die Ergebnisse der von mir vorgenommenen Versuche mit diesbezüglichen Ansichten P. Locatelli's nicht übereinstimmen, stehen sie auch mit den Behauptungen von E. Guyénot und O. Schotté nicht im Einklang. Diese beiden Forscher stehen auf dem Standpunkte, dass die Ausschaltung des Nervensystems eine völlige Einstellung des Regenerationsprozesses bedeutet. Noch weniger sind diese Tatsachen mit der durch P. Weiss vertretenen Meinung zu vereinbaren. Letzterer behauptet, dass der Nerv «eine Art Kraftquelle» darstellt und dass bei seiner Ausschaltung der Einfluss der physikalischen Faktoren, d. h. derjenige der Oberflächenspannung, der Schwerkraft u. s. w. in den Vordergrund tritt. P. Weiss behauptet, dass bei Ausschaltung des Nervensystems der Regenerationsprozess nicht nur in Stockung gerät, sondern hier auch sogar ein Involutionsprozess eintritt.

Diese Behauptung, die dem Nerv gewissermassen die Bedeutung eines s p i r i t u s r e c t o r beimisst und die von dem allgemeinen biologischen Standpunkt angesehen grössten Zweifel einflösst, hat sich auf unserem Versuchsmaterial nicht bestätigt. Es erscheint uns schwierig zu erklären, auf Grund welcher Ursachen P. Weiss den Involutionsprozess bei Tritonen feststellen konnte. Doch ist dies am ehesten—wie auch im Falle P. Locatelli—auf ein tiefgehendes Trauma zurückzuführen, das den Tieren durch Störung der Ernährung und der endokrinen Korrelation infolge der Operation zugefügt wurde.

Unsere Versuchen zeigen das verschiedene Verhältnis des Nervensystems gegenüber zwei Entwicklungsfaktoren: Wachstum und Differenzierung. Was das Wachstum des Regenerats betrifft, so ist aus den Ergebnissen einer Reihe von Serien ersichtlich, dass das Zurückbleiben des Wachstums bei Ausschaltung des Nervensystems gleich seit den ersten Tagen der Regeneration beginnt. Dieses Zurückbleiben hat einen scharf ausgeprägten Charakter. Indem die durch den Akt der Verwundung des Tieres bei der Resektion des *Plexus* bedingte Verzögerung des Wachstums in 2—3 Wochen behoben wird, besteht das Zurückbleiben des Wachstums, das durch die Ausschaltung des Einflusses des Nervensystems hervorgerufen wird, auch nach einem halben Jahre seit der Resektion des *Plexus*. Die Verkleinerung des Regenerats hat einen völlig stabilen, unabwendbaren Charakter.

Wir bemerken noch, dass solch ein stabiles, unabwendbares Zurückbleiben des Wachstums auch im Falle der teilweisen Ausschaltung des Einflusses des Nervensystems bei der Resektion allein von zwei oral gelegenen Zweigen des *Plexus* auftritt.

Was nun die Differenzierung betrifft, so wird auch diese bei der Ausschaltung des Nervensystems in ihrer Entwicklung aufgehalten. Jedoch hat diese Verzögerung der Differenzierung einen so ausgesprochenen Charakter, wie diejenige des Wachstums. Auch hat sie keinen stabilen Charakter und gleicht sich bei der Ausgestaltung der Grundformen aus.

Jedoch muss hervorgehoben werden, dass die Ausschaltung des Nervensystems sich nicht in gleichem Masse auf die einzelnen Gewebe des Organs auswirkt. Die teilweise Resektion aller drei Zweige des *Plexus limbo-sacralis* tritt am deutlichsten am Muskelsystem zu Tage. Anschauend besteht ein

besonders enger Zusammenhang eben zwischen dem Nervensystem und dem Muskelapparat. Daher bilden sich bei Entnervung der Extremität keine Muskelfasern, an ihrer Stelle entsteht üppiges Bindegewebe. Selbst bei teilweisem Ausschalten des Nervensystems, d. h. also bei noch vorhandenem aber abgeschwächtem Einflusse des Nervensystems, der durch die Deviation des *Nervus ischiadicus* erreicht wird, tritt dieselbe Erscheinung der Nichtentwicklung des Muskelsystems auf. Die Regeneration ergibt nicht nur eine schlechthin kleinere, jedoch die normalen Verhältnisse beibehaltende Extremität; das Regenerat hat einen ausgeprägten pathologischen Charakter, da die Muskeln sich entweder gar nicht, oder nur ungenügend entwickeln. Es handelt sich hierbei nicht um Atrophie, sondern um eine Hypoplasie des Muskelsystems.

Zugleich damit nimmt auch die Entwicklung des Knochensystems einen atypischen Verlauf; bei teilweiser Resektion aller Zweige des *Plexus* tritt nicht nur eine Verzögerung der Differenzierung des Skeletts der Extremität ein, sondern die Differenzierung gerät in Stockung und hört vorzeitig auf: die grossen Knochen des Schienbeins und die kleinen des Mittelfusses erreichen ihre vollständige Entwicklung nicht. Sie verharren vielmehr in einem diffusen Zustande.

Dieselbe Erscheinung (die scheinbar eine sekundäre, von der ungenügenden Entwicklung der Muskeln abhängige Erscheinung darstellt) stellen wir, wenn auch in einem schwächeren Grad, ebenfalls bei der teilweisen Ausschaltung des Nervensystems fest, d. h., bei der Resektion allein von zwei oral gelegenen Zweige des *Plexus*, sowie bei der Deviation des *Nervus ischiadicus*.

Dies führt uns zurück zu den alten Werken E. H. Weber's und Hürthle's, sowie zu den neueren R. Rubin's und V. Hamburger's und zu denjenigen der neuesten Autoren, die an Hand der Explantationsmethodik (L. M. Grigorjew) Versuche unternommen haben. Der Beginn der Regeneration und das Knospenstadium treten gewöhnlich auch bei der Resektion des *Nervus ischiadicus* auf. Bei der Deviation des *Nervus ischiadicus* schreitet die Regeneration vorwärts unter gleichzeitigem Zurückbleiben des Wachstums und der Differenzierung, die jedoch geringer sind, als bei der Resektion sowohl des *Plexus*, als des *Nervus ischiadicus*. Schon 16 Tage nach der Deviation des *Nervus ischiadicus* tritt das Knospenstadium auf. Bei der teilweisen Resektion zweier oral gelegener Zweige des *Plexus* findet der Übergang in das folgende Stadium statt und zwar mit einer Verzögerung, die geringer ist, als diejenige, die bei der Resektion aller drei Zweige des *Plexus* auftritt. Dabei macht sich die Verzögerung mehr im Wachstum, als in der Differenzierung bemerkbar.

Dass der Nerv keinen morphogenetischen Faktor, sondern nur eine der wichtigen Vorbedingungen zur normalen Regenerationsmöglichkeit darstellt, ergibt sich auch aus jenem Teil unserer Untersuchungen, den wir an Hand der Methodik der Deviation des Nervs durchführten.

P. Locatelli hat im Jahre 1925 als erste die Deviation des *Nervus ischiadicus* in derselben Richtung vorgenommen, wobei sie, ihrer Aussage nach, eine mehr oder weniger vollkommene atypische Extremität beim Tritoon erhielt. Sie findet, dass diese Neubildung «in überraschender Weise» an eine normale Extremität erinnert.

Unter Anwendung derselben Methodik nahmen E. Guyénost und O. Schotté Versuche an Tritonen vor, indem sie den Nerv der hinteren und der vorderen Extremität deviierten. Diese beiden Autoren behaupten, dass bei der Deviation des Nervs in den basilaren Teil der Extremität sich am Ende des Nervs

ein Blastem in Form einer Knospe bildet, das langsam wächst und alsdann entweder in seiner Entwicklung aufhört, oder aber Zehen—bisweilen sogar eine vollständige Extremität—bildet; in der letezeren kann das Vorhandensein von Skelett, Gefässen, Muskeln usw histologisch festgestellt werden. Bei der Deviation des Nervs hinter den basilaren Teil der Extremität erhält man ein anderes Organ, z. B. einen Kamm oder einen Schwanz—je nach dem, in welcher Richtung, nach oben oder nach hinten zu, die Deviation des Nervs vorgenommen wurde. Diese Autoren haben eine Theorie aufgebaut, die auf der Analogie zwischen der germinalen Lokalisierung des Eies und der Lokalisierung der Regeneration eines entwickelten Organismus beruht (der ihrer Meinung nach eine aus «territoires spécifiques» bestehende Mosaik darstellt).

Die Ergebnisse meiner Forschungsarbeiten stimmen entweder gar nicht, oder nur in einem geringen Masse mit den Behauptungen P. Locatelli's und insbesondere mit denjenigen von E. Guyénot und O. Schotté überein. Es stimmt zwar, dass in einigen Fällen sich am Ende des deviierten Nervs bei Auffrischung der Gewebe an einem offenstehenden Fenster eine Knospe entsteht, die sich manchmal zu einem kleinen Strang entwickelt, der sich jedoch bald darauf wieder auflöst und verschwindet. Was aber die Behauptung von E. Guyénot und O. Schotté betrifft, dass sich am Ende des deviierten Nervs eine Extremität, ein Kamm oder ein Schwanz bildet—je nach dem, in welcher Richtung der Nerv liegt: im basilaren Teil der Extremität oder ausserhalb desselben nach oben oder hinten zu,—so muss gesagt werden, dass ich im Verlauf meiner Versuchsarbeiten keine derartigen Erscheinungen feststellen konnte.

Die Extremität erhalten wir nur im Falle, wenn wir zugleich mit dem Ende des *Nervus ischiadicus* eine Scheibe des Extremitätquerschnittes transplantieren. Sind die positiven Fälle des Auftretens überzähliger Extremitäten als Ergebnis der durch P. Locatelli, E. Guyénot und O. Schotté vorgenommenen Deviation des *Nervus ischiadicus* nicht vielleicht auf eine ungewollte Transplantation des oberen Ausganspunktes der Extremität zugleich mit dem deviierten Nerv zurückzuführen?

Demnach hat sich die Theorie der mosaikartigen regenerativen Lokalisierung des Organismus an Hand unseres Versuchsmaterials nicht bestätigt.

Der Nerv an und für sich stellt wohl einen morphogenetischen Faktor dar, jedoch darf er nicht als absoluter Faktor der Regeneration betrachtet werden.

Wenn die Hauptursache, durch die der Regenerationsprozess bestimmt wird, das Soma selbst mit ihren genetischen Eigenschaften ist, so stellt das Nervensystem eine der Vorbedingungen dar, die augenscheinlich eine verschiedene Rolle auf verschiedenen Stufen der Onto- und Phylogenese spielt wobei diese Rolle umso geringer wird, je einfacher die morphologische und physiologische Struktur des Organismus ist.

Laboratorium für experimentelle Zoologie
Akademie der Wissenschaften der UdSSR
Moskau

Eingegangen
d. 23. I. 1936